المثاليات العظمى:
كل ما تحدثنا عنه عن المرشحات يكون محققاً بنفس الشكل من أجل المثاليات العظمى وذلك استناداً إلى المبرهنة التالية:

مبرهنة
تكون I مثالية عظمى إذا وفقط إذا كانت I' عظمى مرشحة وفي هذه الحالة يكون
$I' = C_{I_A}$

البرهان:
لتكن I مثالية عظمى لقد رأينا سابقاً أن I' مرشحة فعلية فإذا كانت F مرشحة فعلية أخرى بحيث أن $I' \subseteq F \Rightarrow F' \subseteq I$ إن F' هي مثالية فعلية تحوي المثالية العظمى I وبالتالي يكون
I' عظمى مرشحة (مرشحة فعلية عظمى) $F = I' \Rightarrow F' = I$

لتكن I' عظمى مرشحة $\Leftarrow$ I مثالية فعلية لنفرض أن J مثالية فعلية بحيث يكون $I \subseteq J \Rightarrow J' \subseteq I'$ حيث أن J' مثالية فعلية و I' عظمى مرشحة فرضاً $\Leftarrow J' = I' \Rightarrow J = I$ وبالتالي فإن I مثالية عظمى

كما أنه إذا كانت I مثالية عظمى فإن
$x \in C_{I_A} \Leftrightarrow x \notin I \Leftrightarrow x' \in I \Leftrightarrow x \in I'$ (حسب المبرهنة)
ومنه نستنتج أن $I' = C_{I_A}$

ملاحظة:
في أي حلقة تبديلية نعرف المثالية الأولية بالشكل الآتي:
مهما يكن $x, y \in A$ بحيث أن $x.y \in P$ فإنه إما $x \in P$ أو $y \in P$
في حالة الحلقة البوليانية يوجد تكافؤ بين القضيتين التاليتين
a) I مثالية عظمى
b) I مثالية أولية

البرهان

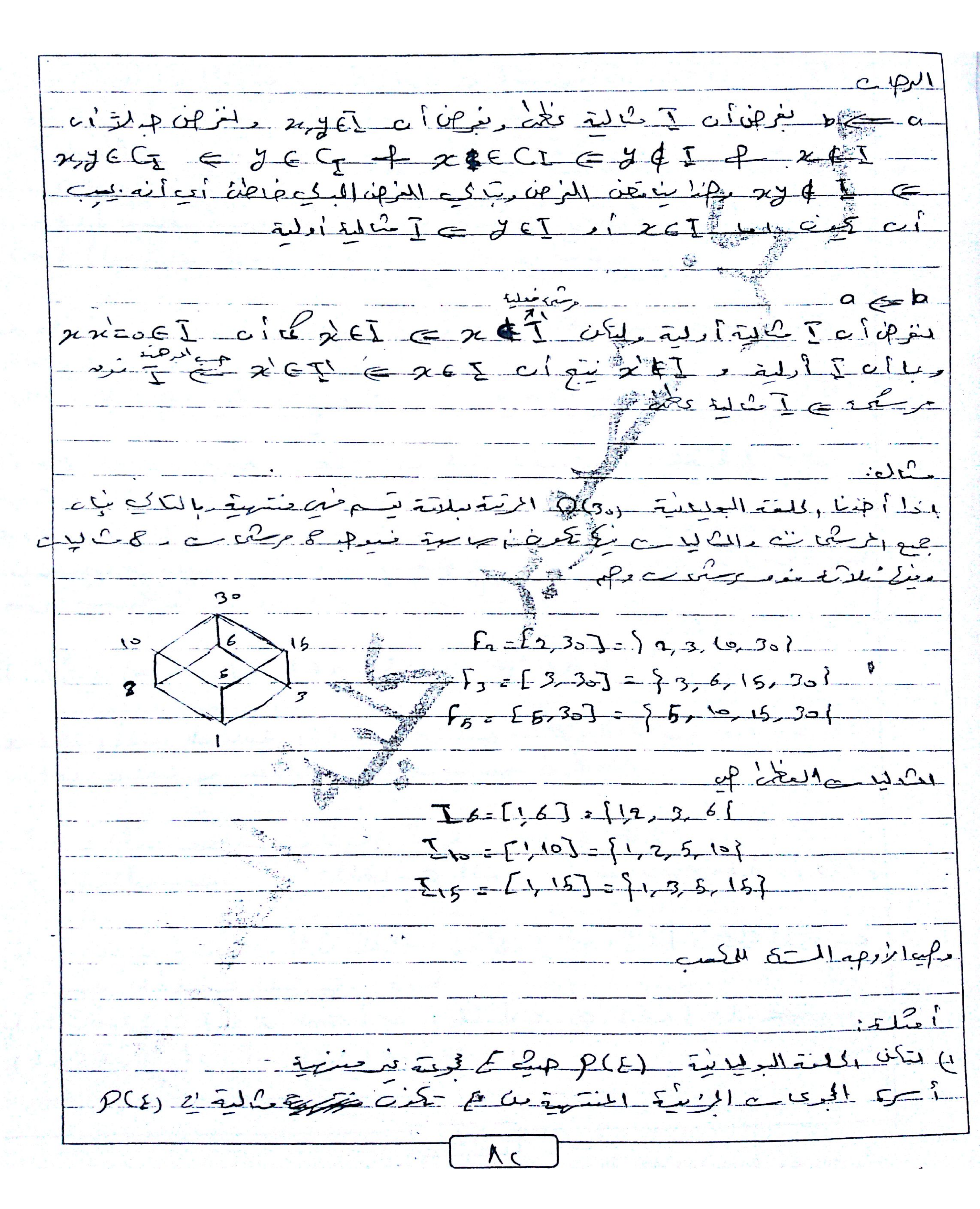
$a \Leftarrow b$ نفرض أن I مثالية عظمى ونفرض أن $xy \in I$ ولنفرض جدلاً أن $x \notin I$ و $y \notin I$ $\Leftarrow$ $x \in C_I$ و $y \in C_I$ $\Leftarrow$ $x, y \in C_I$ $\Leftarrow$ $xy \notin I$ وهذا يناقض الفرض وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ أي أنه يجب أن يكون إما $x \in I$ أو $y \in I$ $\Leftarrow$ I مثالية أولية

$b \Leftarrow a$

نفرض أن I مثالية أولية ولتكن $x \notin I'$ (مرشح فعلية) $\Leftarrow$ $x' \in I$ لأن $xx' = 0 \in I$ وبما أن I أولية و $x' \notin I$ نستنتج أن $x \in I \Leftarrow x' \in I'$ حسب المبرهنة I' شرط مرشح $\Leftarrow$ I مثالية عظمى

مثال:

إذا أخذنا الحلقة البوليانية $D(30)$ المرتبة بعلاقة القسمة فهي منتهية وبالتالي فإن جميع المرشحات والمثاليات فيها تكون رئيسية فيوجد 8 مرشحات و 8 مثاليات ومنها ثلاثة منها مرشحات عظمى



$F_2 = [2,30] = \{2, 3, 6, 30\}$

$F_3 = [3,30] = \{3, 6, 15, 30\}$

$F_5 = [5,30] = \{5, 10, 15, 30\}$

المثاليات العظمى هي

$I_6 = [1,6] = \{1, 2, 3, 6\}$

$I_{10} = [1,10] = \{1, 2, 5, 10\}$

$I_{15} = [1,15] = \{1, 3, 5, 15\}$

وهي الأوجه المقابلة للمكعب

أمثلة:

1) لتكن الحلقة البوليانية $P(E)$ حيث E مجموعة غير منتهية

أسرة المجموعات الجزئية المنتهية منها تكون مثالية في $P(E)$

- أسرة المجموعات الجزئية ذات المتممات المنتهية تكون مرشحة في $P(E)$

البرهان: واضح

ليكن a عنصراً ثابتاً في E

أسرة المجموعات الجزئية التي تحوي a تكون مرشحة

أسرة المجموعات الجزئية التي لا تحوي a تكون مثالية كاملة في $P(E)$

نلاحظ أن المرشحات والمثاليات المعطاة من هذا الشكل تكون أساسية مولدة على التوالي بـ $\{a\}$ و $C\{a\}$

ولكن توجد أيضاً بعض المرشحات التي ليست أساسية

- أسرة المجموعات الجزئية ذات المتممات المنتهية من E تكون مجموعة في مرشح U وهذا المرشح U لا تكون أساسية

لنفرض أن U أساسية مولدة بالعنصر A (مجموعة جزئية غير خالية من E)

فإنه من أجل أي $x \in U$ $\Leftarrow$ $X \supseteq A$ من أجل أي مجموعة جزئية ذات متممة منتهية أي أن $C_A \subseteq C$ وهذا غير ممكن

لأن $Y = \{a\}$ حيث $a \in A$ و $\{a\} \subseteq C_A$ منتهية

③ لتكن الحلقة البوليانية $F C(E)$ أسرة المجموعات الجزئية المنتهية أو ذات المتممات المنتهية من المجموعة E الغير منتهية

- أسرة المجموعات المنتهية تكون مثالية أعظمية في $P(E)$

أسرة المجموعات ذات المتممات المنتهية تكون مرشحة في $F C(E)$

فإذا فرضنا أن $F(E)$ أسرة المجموعات المنتهية في E حيث $F(E)$ و $C(E)$ أسرة المجموعات ذات المتممات المنتهية

فإذا كانت $X \in F C(E)$ بحيث أن $X \notin C(E)$ $\Leftarrow$ $X \in F(E)$ منتهية $\Leftarrow$

$C_X \in C(E)$ أي أن $C(E)$ مرشحة

إن المثالية العظمى في فضاء المرشحة هذه ليست رئيسية لأن $I' = \frac{C_I}{A}$

كل فضاء مرشحة من $f(E)$ تختلف عن $C(E)$ تكون رئيسية

وذلك لأنه إذا كانت H فضاء مرشحة بحيث يكون $H \neq C(E)$ يكون $H \notin C(E)$ (أي لكون H أعظمية)

إذاً H تحتوي على الأقل مجموعة جزئية منتهية غير خالية X، لنفرض أن $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ أي أن $X = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_n\}$ وأن H فضاء مرشحة أولية فمن المؤكد أنه يوجد $i = 1, \dots, n$ بحيث يكون $\{a_i\} \in H$ (وهنا الدليل وحيد لأنه لو وجد دليل آخر مثلاً $\{a_j\}, \{a_i\} \in H$ وهذا غير ممكن لأن H فضاء مرشحة لاحتوت $\{a_i\} \cap \{a_j\} = \phi \in H$)

وبالتالي فإن H فضاء مرشحة رئيسية مولدة بـ $\{a_i\}$ وذلك لأن

- إذا كانت $\{a_i\} \subseteq X$ فإن $X \in H$
- إذا كانت $X \in H$ لنفرض جدلاً أن $\{a_i\} \not\subseteq X$ فإن $a_i \notin X$ ⇐ $a_i \in C_X$ ⇐ $\{a_i\} \subseteq C_X$ ⇐ $X \subseteq C\{a_i\}$ ⇐ $C\{a_i\} \in H$ وهذا غير ممكن أي أن $\{a_i\} \subseteq X$